

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra	1
1.1 Logik, Mengen	1
1.2 Funktionen, Beweise, Induktion	2
1.3 $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ und Lineare Gleichungssysteme	3
1.4 Vektorräume	5
1.5 Lineare Abbildungen	5
1.6 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit	6
1.7 Elemente der Zahlentheorie	7
1.8 Komplexe Zahlen	8
1.9 Abzählen. Elemente der Stochastik	8
1.10 Algebraische Strukturen	8
2 Analysis	9
2.1 Elementare Funktionen	9
2.2 Reelle Zahlen, Folgen und Grenzwerte	10
2.3 Reihen	10
2.4 Stetigkeit	11
2.5 Differenzierbare Funktionen	11
2.6 Das Riemannsches Integral	12

1 Algebra

1.1 Logik, Mengen

- Was ist eine Aussage? Geben Sie einige Beispiele für Aussagen an. Was ist eine zusammengesetzte Aussage? Was sind die folgenden logischen Operatoren?

$$\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B.$$

Wie lassen sich die letzten beiden Operatoren mithilfe der ersten drei darstellen? Bilden Sie zu jedem dieser Operatoren eine Beispielaussage und negieren Sie diese.

- Wie sieht die Negation einer Implikation bzw. einer Äquivalenz aus?
- Was ist eine Wahrheitstafel? Wozu dient sie?
- Was ist eine Tautologie? Wie zeigt man, dass eine Aussage eine Tautologie ist bzw. dass zwei Aussagen äquivalent sind?
- Welche Aussagen nennt man Sätze von de Morgan, Distributivsätze, modus ponens, modus tollens, modus barbara? Was ist die Bedeutung dieser Aussagen?
- Was sind Quantoren \forall und \exists ? Wie negiert man Aussagen mit Quantoren? Wie negiert man z.B. die Aussage $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 \neq 0)$?
- Was sind die folgenden mengentheoretischen Notationen?

$$\{\dots : \dots\}, \in, \subset, \subsetneq, \bigcup_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} A_i, A \setminus B, A \times B, \mathcal{P}(A), A_1 \times \dots \times A_n.$$

- Was versteht man unter Kardinalität bzw. Mächtigkeit einer Menge?
- Was ist eine leere Menge? Welche Eigenschaften hat sie?
- Was bedeutet es, dass zwei Mengen gleich sind? Wie beweist bzw. widerlegt man eine solche Aussage?
- Was sind Mengendiagramme (Venn-Diagramme) und wozu dienen sie? Reicht es, ein Mengendiagramm zu skizzieren, um Gleichheit zweier Mengen zu beweisen bzw. zu widerlegen?

1.2 Funktionen, Beweise, Induktion

- Was ist eine Relation zwischen zwei Mengen A und B ? Was ist eine Relation auf der Menge A ? Geben Sie drei Beispiele von Relationen an.
- Welche Relationen heißen reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch?
- Was ist eine Äquivalenzrelation. Nennen Sie einige Beispiele der Äquivalenzrelationen?
- Welche Relationen nennt man Funktionen oder Abbildungen? Was ist eine Funktionsvorschrift?
- Es seien X, Y Mengen, $M \subset X$ und $N \subset Y$ Teilmengen sowie $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wie sind die Wertemenge (das Bild) $f(M)$ und das Urbild $f^{-1}(N)$ definiert?
- Was sind Definitionsmenge (Startmenge) und Zielmenge einer Abbildung? Ist es wichtig, diese immer anzugeben?
Konkret: es seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ und $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = x^3$. Handelt es sich bei f und g um dieselbe oder um verschiedene Funktionen?
- Was heißt es, dass eine Funktion injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist? Charakterisieren Sie diese Eigenschaften auf möglichst viele unterschiedliche Weisen.
- Was versteht man unter Komposition (Verkettung) $f \circ g$ zweier Funktionen f und g ? Welche Bedingungen müssen f und g erfüllen, damit $f \circ g$ wohldefiniert ist?
- Was bedeutet es, dass zwei Mengen gleichmächtig sind?
- Kann eine Menge M und ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ gleichmächtig sein?
- Sind \mathbb{N} und \mathbb{Q} gleichmächtig? Sind \mathbb{N} und \mathbb{R} gleichmächtig? Wie beweist man dies jeweils?
- Was ist ein Beweis? Was hat man zu beachten, wenn man eine Äquivalenz zwischen zwei Aussagen nachweisen soll?
- Was bedeutet es, eine Aussage zu widerlegen?
- Was versteht man unter einem Widerspruchsbeweis? Nennen Sie mindestens drei Widerspruchsbeweise.
- Was ist das Prinzip der vollständigen Induktion? Kann man jede Aussage mit Induktion beweisen, und wenn nicht, dann welche? Was hat Induktion mit natürlichen Zahlen zu tun?
- Aus welchen drei Schritten besteht jeder Induktionsbeweis?
- Ist Induktionsanfang tatsächlich so wichtig? Kann man ihn nicht einfach weglassen?

1.3 $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ und Lineare Gleichungssysteme

- Wie sind Addition und Multiplikation mit einem Skalar für Vektoren in \mathbb{R}^2 erklärt? Wie kann man Vektoren in \mathbb{R}^2 und diese beiden Operationen geometrisch deuten?
- Was ist eine Basis von \mathbb{R}^2 ? Welches Paar von Vektoren wird Standardbasis von \mathbb{R}^2 genannt?
- Es sei $c \in \mathbb{R}^2$ und (a, b) eine Basis von \mathbb{R}^2 . Was versteht man unter Koordinaten von c bezüglich der Basis (a, b) ?
- Was ist die Determinante zweier Vektoren? Was ist der Zusammenhang zwischen Basis, Determinante und Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung eines linearen Gleichungssystems (Stichwort: Cramersche Regel)?
- Wie ist eine Gerade in \mathbb{R}^2 definiert? Was nennt man einen Stützvektor, einen Richtungsvektor, einen Normalenvektor einer Geraden? Wie können Geraden alternativ beschrieben werden?
- Wie kommt man bei Geraden von einer Parametrisierung zu einer beschreibenden Gleichung (und umgekehrt, von einer Gleichung zu einer Parametrisierung)?
- Inwiefern führen Durchschnitte von Geraden in \mathbb{R}^2 zu linearen Gleichungssystemen?
- Wie überprüft man, ob drei Punkte kollinear sind, d.h. auf einer Geraden liegen?
- Welche Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ werden linear genannt? Geben Sie mindestens drei Beispiele linearer Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an.
- Inwiefern hängen die linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit 2×2 -Matrizen zusammen? Wie konstruiert man die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung?
- Welche Matrixoperation entspricht einer Komposition der linearen Abbildungen? Ist diese Verknüpfung kommutativ?
- Es sei (a, b) eine Basis von \mathbb{R}^2 . Welche Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird Parallelprojektion auf $\mathbb{R} \cdot a$ entlang b genannt? Ist sie linear? Wie berechnet man die Matrix einer Parallelprojektion auf $\mathbb{R} \cdot a$ entlang b ?
- Welche Matrizen heißen invertierbar? Welche Bedingung müssen die Einträge einer 2×2 -Matrix A erfüllen, damit A invertierbar ist? Wie sieht die Inverse A^{-1} aus?
- Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist bereits durch ganz wenige Werte eindeutig bestimmt. Welche Teilmengen $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ legen A in diesem Sinne bereits eindeutig fest?
- Es seien \mathcal{B} und \mathcal{C} zwei Basen von \mathbb{R}^2 und $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Was versteht man unter der Matrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$ von A bezüglich der Basen \mathcal{C} und \mathcal{B} ? Wie berechnet man ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$ aus der Matrix A (d.h., aus der Matrix von ${}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis \mathcal{E}) und umgekehrt? Wie berechnet man ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ aus ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$?
- Wie ist die Länge eines Vektors aus \mathbb{R}^2 definiert?
- Welche lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ werden Bewegungen genannt? Welche zwei Typen von Bewegungen gibt es in \mathbb{R}^2 ?
- Wie ist der Winkel $\angle(a, b)$ zwischen zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ mithilfe von Drehungen erklärt?

- Wie wird mittels des Skalarprodukts die Länge eines Vektors bzw. Winkel zwischen zwei Vektoren in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 definiert? Wie wird die Orthogonalität zweier Vektoren mithilfe des Skalarprodukts festgestellt?
- Wann nennt man zwei (drei, vier usw.) Vektoren aus \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 linear abhängig bzw. unabhängig?
- Es seien a und b zwei Vektoren ungleich Null aus \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 . Was ist die Orthogonalprojektion von a auf b ? Wie berechnet man den Lotfußpunkt $L_b(a)$ von a auf b (den Punkt auf $\mathbb{R} \cdot b$ mit minimalem Abstand zu a), das Lot (den Höhenvektor) von a auf b ?
- Wie kann man Geraden und Ebenen in \mathbb{R}^3 beschreiben?
- Was ist das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) in \mathbb{R}^3 ? Warum ist das Vektorprodukt nützlich, um Ebenen in \mathbb{R}^3 zu beschreiben?
- Wie kann die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren mithilfe des Vektorprodukts festgestellt?
- Was sind die Rechenregel für das Skalar- bzw. Vektorprodukt?
- Wie kommt man bei Ebenen von einer Parametrisierung zu einer beschreibenden Gleichung (und umgekehrt, von einer Gleichung zu einer Parametrisierung)?
- Unter welcher Bedingung an die Richtungsvektoren sind zwei Geraden parallel? Gibt es eine einfache Bedingung für die Parallelität zweier Ebenen? Wann ist eine Gerade parallel zu einer Ebene?
- Wie berechnet man die Determinante von drei Vektoren in \mathbb{R}^3 bzw. von einer 3×3 Matrix? Was versteht man unter Entwicklung der Determinante nach einer Zeile bzw. Spalte? Was sind die Rechenregeln für die Determinante?
- Inwiefern führen Durchschnitte von Ebenen in \mathbb{R}^3 zu linearen Gleichungssystemen?
- Was sind die Möglichkeiten für die Schnittmenge zweier Ebenen in \mathbb{R}^3 ?
- Unter welcher Bedingung besteht die Schnittmenge dreier Ebenen in \mathbb{R}^3 aus einem einzigen Punkt? Wie übersetzt sich diese Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung eines linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen?
- Was versteht man unter den Abstand zwischen zwei Mengen in \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 ?
- Wie berechnet man den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden, einem Punkt und einer Ebene, zweier windschiefen Geraden, einer Geraden und einer Ebene? Wie leitet man diese Formeln her?
- Wie berechnet man die Fläche des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms bzw. das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Parallelotops (Spats)? Wie ändern sich diese Formeln für das Dreieck bzw. das Tetraeder?
- Inwiefern hängen die linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit 3×3 -Matrizen zusammen? Wie konstruiert man die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung?
- Welche Bedingung muss eine 3×3 -Matrix A erfüllen, damit A invertierbar ist? Wie rechnet man die Inverse A^{-1} aus? (Nennen Sie mindestens zwei Methoden.)

- Es seien \mathcal{B}, \mathcal{C} Basen von \mathbb{R}^3 und $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Was versteht man unter der Matrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$ von A bezüglich der Basen \mathcal{C} und \mathcal{B} ? Wie berechnet man ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$ aus der Matrix A (d.h., aus der Matrix von ${}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis \mathcal{E}) und umgekehrt? Wie berechnet man ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ aus ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$?
- Welche linearen Abbildungen des \mathbb{R}^3 werden Bewegungen oder orthogonalen Abbildungen genannt? Welche Typen von Bewegungen gibt es?
- Es sei die lineare Abbildung A durch ihre Matrix gegeben. Wie erkennt man, ob A orthogonal ist? Wie kann man den Typ einer orthogonalen Abbildung A bestimmen?
- Welche Basis heißt Orthonormal? Wie kann man Bewegungen mithilfe der Orthonormalbasen definieren und klassifizieren?
- Was versteht man unter der Orientierung einer Basis? Was ist die Rechte-Hand-Regel?

1.4 Vektorräume

- Wie ist ein K -Vektorraum definiert? (Was ist hier K ?) Nennen Sie mindestens drei Beispiele von Vektorräumen.
- Welche Teilmengen eines Vektorraums heißen Unterräume? Wie testet man am einfachsten, ob eine Teilmenge ein Unterraum ist? Was sind die sogenannten triviale Unterräume eines Vektorraums?
- Sind Vereinigungen bzw. Schnitte der Unterräume wieder Unterräume? Wie ist die Summe zweier Unterräume definiert? Wann heißen solche Summen direkt?
- Es sei $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein System von Vektoren in einem K -Vektorraum V . Was bedeutet es, dass S linear abhängig, linear unabhängig, ein Erzeugendensystem, eine Basis ist?
- Was ist die Dimension eines Vektorraumes? Nennen Sie einige Beispiele unendlich dimensionaler Vektorräume.
- Was sind die wichtigen Basischarakterisierungssätze: Basisauswahlsatz, Steinitz'scher Austauschsatz, Basisergänzungssatz, etc.? Verstehen Sie deren Beweise?
- Wie berechnet man eine Basis aus einem Erzeugendensystem eines Unterraumes? Was ist die Zeilenstufenform einer Matrix?
- Es seien zwei Basen B und S eines Vektorraums V gegeben. Was versteht man unter Koordinaten $\gamma_B(v)$ eines Vektors v bzgl. der Basis B ?
- Wie bestimmt man die Koordinaten $\gamma_S(v)$ eines Vektors v bzgl. der Basis S , wenn die Koordinaten $\gamma_B(v)$ bekannt sind? Was ist die Basiswechselmatrix von B nach S .
- Wie hängen die Basiswechselmatrizen von B nach S und von S nach B zusammen?

1.5 Lineare Abbildungen

- Was versteht man unter einer Koeffizientenmatrix bzw. einer erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems? Inwiefern helfen sie, die Lösungen des Gleichungssystems schneller zu bestimmen?
- Es seien V und W zwei K -Vektorräume. Welche Abbildungen $A : V \rightarrow W$ heißen linear? Was ist ein Homomorphismus, ein Endomorphismus, ein Isomorphismus?

- Was sind Kern, Bild und Rang einer linearen Abbildung?
- Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Ker } A = \{0\}$ ist.
- Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist bereits durch ganz wenige Werte eindeutig bestimmt. Welche Teilmengen $B \subset V$ legen A in diesem Sinne bereits eindeutig fest? Warum?
- Es seien B eine Basis von V , C eine Basis von W und $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Was versteht man unter der Darstellungsmatrix ${}_C A_B$ von A bzgl. der Basen B und C ? Wie berechnet man ${}_C A_B$ aus der Matrix A (d.h., aus der Matrix von A bezüglich der Standardbasen von V und W) und umgekehrt? Wie sieht die Basiswechselformel im Allgemeinen aus?
- Welche Matrizen heißen invertierbar? Wie entscheidet man, ob eine Matrix invertierbar ist, bzw. berechnet man die Inverse am schnellsten?
- Wann nennt man einen Endomorphismus $A : V \rightarrow V$ Projektion? Wie kann V zerlegt werden?
- Es sei V ein Vektorraum und $U \leq V$. Was ist der Quotientenraum V/U ? Was sind die Elemente eines Quotientenraums und wie sind die Verknüpfungen definiert?
- Es sei $U \leq V$ mit Basis B . Wie konstruiert man eine Basis von V/U ?
- Es sei $A : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $U = \text{Ker } A$. Welche Eigenschaften haben die Abbildungen $\bar{A} : V/U \rightarrow \text{Bild } A$ mit $\bar{A} : v + U \mapsto A(v)$ sowie $\mathcal{A} : V/U \rightarrow V/U$ mit $v + U \mapsto A(v) + U$? Warum ist \bar{A} ein Isomorphismus?
- Wie ist die Determinante einer Matrix definiert? Welche Matrizen haben Determinanten?
- Für welche Matrizen ist die Determinante gleich 0?
- Wie kann man die Determinante mithilfe von Gauß-Algorithmus berechnen? Wie ändert sich die Determinante unter elementaren Zeilenoperationen?
- Was ist eine Permutation auf n , was ist das Signum einer Permutation? Inwiefern können die Permutationen helfen, Determinante einer Matrix auszurechnen (Stichwort: Leibniz-Regel)?
- Was versteht man unter der Determinante einer linearen Abbildung? Warum ist diese wohldefiniert?

1.6 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit

- Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus?
- Was ist das charakteristische Polynom χ_A eines Endomorphismus A . Wie berechnet man die Eigenwerte von A mithilfe von χ_A ?
- Es sei λ ein Eigenwert von A . Was ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ ?
- Wann heißt ein Endomorphismus diagonalisierbar? Welche hinreichende und notwendige Bedingungen für Diagonalisierbarkeit kennen Sie?

- Was bedeutet es, ein Endomorphismus bzw. eine Matrix in ein Polynom einzusetzen, d.h., was versteht man unter $p(A)$ für ein Polynom p und ein Endomorphismus bzw. eine Matrix A ?
- Was ist das Minimalpolynom m_A von A ? Wie hängen das charakteristische und das Minimalpolynom zusammen?

1.7 Elemente der Zahlentheorie

Primzahlen. Polynome. Teilbarkeit, ggT und kgV. Euklidischer Algorithmus. Kongruenzrechnung. (Kleiner Satz von Fermat, Satz von Euler.) (Chinesischer Restsatz.)

- Was ist Division mit Rest? Was bedeutet es, dass eine ganze Zahl die andere teilt?
- Was ist die Primfaktorzerlegung einer ganzen Zahl? Ist diese für jede ganze Zahl eindeutig? Wie bestimmt man die Primfaktorzerlegung?
- Was sind der größte gemeinsame Teiler (ggT) sowie das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier ganzen Zahlen? Wie bestimmt man diese, wenn die Primfaktorzerlegungen der beiden Zahlen bekannt sind?
- Wie bestimmt man den ggT mittels des Euklidischen Algorithmus? Was sind die Bézout-Koeffizienten und wie bestimmt man diese mittels des erweiterten Euklidischen Algorithmus?
- Was bedeutet es, wenn $a \equiv b \pmod{n}$ ist? Was sind die Rechenregeln für Kongruenzen modulo n ?
- Was sind die Regeln für die Teilbarkeit durch 2, 3, 5, 9? Wie kann man eine Regel für die Teilbarkeit durch eine beliebige Zahl erstellen?
- Wann ist die Dezimalentwicklung einer Rationalen Zahl abbrechend, wann periodisch? Wie bestimmt man die Dezimalentwicklung? Wie kann man umgekehrt den Bruch zu einer gegebenen Dezimalentwicklung finden?
- Wie kann man beweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist? Können Sie den Beweis auf \sqrt{p} für eine beliebige Primzahl p verallgemeinern?
- Was sind die Fermat- und die Mersenne-Zahlen? Sind diese immer prim?
- Was besagt der kleine Satz von Fermat? Geben Sie mindestens einen Beweis an.
- Wann hat der Dreisatz $a \cdot x \equiv b \pmod{n}$ eine Lösung? Wie unterscheiden sich verschiedene Lösungen des Dreisatzes?
- Was ist die Eulersche φ -Funktion. Welche Eigenschaften hat sie?
- Was besagt der Satz von Euler? Geben Sie mindestens einen Beweis an.
- Wie versteht man unter "schnellem Potenzieren modulo n "?
- Wann kann man simultane Kongruenzen lösen bzw. Was besagt der Chinesische Restsatz? Geben Sie den Lösungsalgorithmus an.

1.8 Komplexe Zahlen

- Wie ist die Zahl i definiert? Was ist eine komplexe Zahl?
- Wie addiert bzw. multipliziert man komplexe Zahlen? Welche Rechenregel gelten in \mathbb{C} ? Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die multiplikative Inverse z^{-1} definiert? Wie berechnet man diese?
- Was sind Realteil, Imaginärteil, (Absolut)betrag, Argument, komplex konjugierte einer komplexen Zahl?
- Welchen Zusammenhang gibt es zwischen komplexen Zahlen und der reellen Ebene \mathbb{R}^2 ? Was ist die Gaußsche Zahlenebene? Wie sehen z.B. folgende Mengen in der Gaußschen Zahlenebene aus:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}, \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 1\}, \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}\right\}?$$

Wie kann man Addition bzw. Multiplikation zweier komplexen Zahlen geometrisch deuten?

- Was versteht man unter Polardarstellung komplexer Zahlen? Inwiefern ist diese Darstellung nützlich?
- Wie lassen sich die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus leicht mittels Geometrie der komplexen Multiplikation beweisen?
- Was ist die De Moivresche Formel? Wie lassen sich Potenzen komplexer Zahlen mittels dieser Formel leicht ausrechnen?
- Welche komplexe Zahlen werden n -te Einheitswurzeln genannt? Wie berechnet man die n -ten Wurzeln einer Zahl $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$? Wie viele gibt es? Die Ecken welcher Figur bilden die n -ten Wurzeln einer komplexen Zahl?

1.9 Abzählen. Elemente der Stochastik

Rekursionen. Binomialkoeffizienten. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

- Wie sind die Fibonacci-Zahlen rekursiv definiert? Was ist die geschlossene Formel für Fibonacci-Zahlen?
- Wie löst man lineare Rekursionsgleichungen der ersten Ordnung?
- Wie löst man lineare Rekursionsgleichungen der zweiten Ordnung? Was nennt man charakteristische Gleichung?
- Was ist der binomische Lehrsatz? Was sind die Binomialkoeffizienten (geschlossene Formel)? Was zählen die Binomialkoeffizienten (kombinatorische Definition)?
- Wie lassen sich die Binomialkoeffizienten rekursiv berechnen? Was ist das Pascalsche Dreieck?

1.10 Algebraische Strukturen

Gruppen. Permutationen. Ringe und Körper. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Endliche Körper. K-Algebren.

- Was ist eine Permutation einer endlichen Menge? Was versteht man unter einer Permutation auf n ? Was ist die Tabellenform (Zweizeilenform) und die Tupelschreibweise einer Permutation?

- Wie multipliziert man Permutationen? Was ist die symmetrische Gruppe S_n ? Was ist die Mächtigkeit von S_n ? Was ist das neutrale Element $e \in S_n$? Wie bestimmt man das Inverse σ^{-1} eines Elements $\sigma \in S_n$?
- Welche Permutationen heißen Zykeln? Wie schreibt man eine beliebige Permutation als Produkt disjunkter Zykeln bzw. Was ist die Zykelschreibweise einer Permutation?
- Welche Permutationen heißen Transpositionen? Welche Transpositionen heißen Nachbarvertauschungen? Wie kann man eine beliebige Permutation als Produkt der Nachbarvertauschungen schreiben?
- Wie ist das Vorzeichen (Signum) $\text{sgn } \sigma$ einer Permutation $\sigma \in S_n$ definiert? Nennen Sie möglichst viele Methoden, Signum einer Permutation zu bestimmen.
- Was ist eine Gruppe? Welche Gruppen heißen abelsch (kommutativ)? Nennen Sie möglichst viele Beispiele von Gruppen. Geben Sie mindestens drei Mengen (mit darauf wohldefinierten Verknüpfungen) an, die keine Gruppen sind.
- Welche Teilmengen einer Gruppe heißen Untergruppen?
- Seien G und H Gruppen. Welche Abbildungen $\varphi : G \rightarrow H$ heißen Gruppenhomomorphismen? Was sind Isomorphismen, Automorphismen?
- Welche Gruppen heißen zyklisch? Welche Elemente der zyklischen Gruppen heißen Erzeuger? Nennen Sie einige Beispiele von endlichen und unendlichen zyklischen Gruppen.
- Was ist ein Ring? Welche Elemente eines Rings heißen Einheiten, welche Nullteiler? Welche Ringe heißen Körper?
- Was ist der Restklassenring \mathbb{Z}/n ? Für welche n ist es sogar ein Körper?

2 Analysis

2.1 Elementare Funktionen

- Was ist die (quadratische bzw. zweite) Wurzel aus einer Zahl $a \geq 0$?
- Was sind die Rechenregeln für Potenzen? Wie kann man Wurzeln als rationale Potenzen betrachten?
- Wie ist der Betrag definiert bzw. wie schreibt man den Betrag als stückweise Funktion? Gegeben sei der Graph von $f(x)$. Wie sieht der Graph von $|f(x)|$ und $f(|x|)$ aus? Wie löst man Betragsgleichungen?
- Wie löst man quadratische Gleichungen mithilfe quadratischer Ergänzung? Wie kann man Nullstellen eines Polynoms für seine Faktorisierung verwenden? Wie bestimmt man den Scheitelpunkt des Graphen einer quadratischen Funktion?
- Wie findet man alle Lösungen einer kubischen Gleichung, wenn man eine Lösung kennt bzw. raten kann? Wie geht man im Allgemeinen vor, wenn keine Lösung bekannt ist? Was ist die Cardansche Formel?
- Was ist eine gebrochen lineare Funktion? Wie bestimmt man die senkrechte und waagerechte Asymptoten?
- Wie funktioniert die Partialbruchzerlegung?

- Gegeben sei der Graph von $f(x)$, wie sieht der Graph von $-f(x)$, $f(-x)$, $f(x - k)$, $f(x) + b$ und $af(x)$ aus?
- Welche Funktionen heißen gerade oder ungerade, welche periodisch? Wie bilden sich diese Begriffe an dem Graphen der Funktion ab?
- Wie hängen Winkelmaß (Grad) und Bogenlänge (Radiant) zusammen? Wie definiert man $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ an einem rechtwinkligen Dreieck und an einem Einheitskreis?
- Was sind die wichtigsten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen? Wie lauten die Additionstheoreme?
- Wie sind die Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen definiert? Was sind ihre Definitionsbereiche?
- Was sind die Exponential- und die logarithmischen Funktionen? Was sind ihre Definitionsbereiche? Was ist das besondere an den Funktionen e^x und $\ln x$ Was sind die wichtigen Rechenregeln für Logarithmen?

2.2 Reelle Zahlen, Folgen und Grenzwerte

- Wie kann man reelle Zahlen mithilfe von rationalen Zahlenfolgen approximieren? (z.B. Dezimalbruchentwicklung, Binärbruchentwicklung, etc.) Wie sind die reellen Zahlen definiert?
- Welche Zahlenfolgen heißen konvergent? Wie ist der Grenzwert einer Folge definiert? Was sind die Rechenregeln für Grenzwerte? Was ist das "Sandwich"-Lemma ("Polizisten"-Lemma)?
- Welche Folgen heißen Cauchy-Folgen? Sind alle Cauchy-Folgen konvergent?
- Was besagt der Häufungsstellensatz? Was ist der Monotoniesatz? Liefert der Monotoniesatz auch den Grenzwert der Folge?
- Was sind das Infimum und Supremum einer Menge? Was sind Limes inferior und Limes superior einer reellen Zahlenfolge?
- Wie lauten die Regeln von l'Hospital?

2.3 Reihen

- Was versteht man unter einer unendlichen Summe, einem unendlichen Produkt? Was eine geometrische Reihe? Was versteht man unter der harmonischen Reihe? Konvergiert oder divergiert die harmonische Reihe?
- Was ist das Cauchysche Konvergenzkriterium? Bilden die Summanden einer konvergenten Reihe notwendigerweise eine Nullfolge?
- Wie lauten die folgenden Konvergenzkriterien für Reihen: Majorantenkriterium (Minorantenkriterium), Leibnizkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium.
- Welche Reihen heißen absolut konvergent? Sind alle konvergenten Reihen auch absolut konvergent? Wie lauten die Konvergenzkriterien von Kummer und Dini, Raabe und Gauß?
- Welche Reihen nennt man Potenzreihen? Was ist der Konvergenzradius/-bereich einer Potenzreihe? Wie multipliziert man Potenzreihen? Was ist die formale Ableitung einer Potenzreihe? Was ist ihr formales Integral?

- Wie ist der verallgemeinerte Binomialkoeffizient $\binom{s}{k}$, $s \in \mathbb{R}$, definiert? Was ist die binomische Reihe? Wie kann man mit Hilfe der binomischen Reihe beliebige Wurzeln annähern? Wie sieht das Verfahren z.B. konkret für $\sqrt{37}$ aus?

2.4 Stetigkeit

- Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Welche Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißen stetig in einem Punkt $x_0 \in D$ bzw. gleichmäßig stetig (ε, δ -Kriterium)?
- Was sind die rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte einer Funktion? Wie lautet das Folgenstetigkeitskriterium?
- Bilden die stetigen Funktionen einen Vektorraum? Welche weiteren algebraischen Eigenschaften stetiger Funktionen kennen Sie (Produkt, Quotient, Umkehrfunktion)?
- Welche Teilmengen von \mathbb{R} heißen offen, abgeschlossen, kompakt?
- Was besagen die folgenden Sätze über stetige Funktionen: Der Satz von Weierstraß, der Zwischenwertsatz, der Satz über die Monotone Umkehrfunktion, Satz über die gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Mengen?
- Was ist der Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz bei Funktionenfolgen?

2.5 Differenzierbare Funktionen

- Was bedeutet es, dass eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$ ist? Was ist die Ableitung $f'(x_0)$?
- Wie lauten die Rechenregeln für die Ableitung? Wie lautet die Ableitung der Umkehrfunktion?
- Was sagt der Satz über die lineare Approximation einer differenzierbaren Funktion aus? Ist jede differenzierbare Funktion stetig? Ist jede stetige Funktion differenzierbar?
- Wie hängen die Nullstellen einer stetig-differenzierbaren Funktion mit denen ihrer Ableitung zusammen? Wie lautet der Satz von Rolle?
- Was besagt der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung? Wie hängen Monotonie einer differenzierbaren Funktion und das Vorzeichen ihrer Ableitung zusammen?
- Wie hängen die Nullstellen der Ableitung einer differenzierbaren Funktion mit ihren Extrema zusammen? Welche Rolle spielt dabei das Vorzeichen der zweiten Ableitung?
- Wie ist die Taylorreihe einer analytischen (beliebig oft differenzierbaren) Funktion f im Punkt x_0 definiert? Welche Rechenregeln gibt es für Taylorreihen?
- Was ist die Taylorsche Formel für eine n -mal differenzierbare Funktion f im Punkt x_0 ? Wie sieht das Lagrangsche Restglied aus?

2.6 Das Riemannsches Integral

- Welche Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißen Riemannintegrierbar? Was ist das Riemannintegral $\int_a^b f(x)dx$?
- Wie lauten die Rechenregeln für Integrale?
- Was ist die Stammfunktion einer Funktion f ? Wie hängen Ableitung und Integral einer Funktion zusammen? Was ist der Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung?
- Was sind die Substitutionsregel und die Regel der partiellen Integration? Wie hängen diese Regeln mit denen der Ableitung (Ketten- und Produktregel) zusammen?